98. Riemann 空間の上で定義された或種のベクトル空間に就て(II)

朝 長 康 郎

§3（第7号の談話69に続く） 今後は空間に捩れがないことを仮定する．即ち
線素

$$dx^{\lambda}=\begin{cases} dx^{i} & (\lambda=i) \\ 0 & (\lambda=0) \end{cases}$$

を任意の方向 $\underset{1}{d}x^{i}$，$\underset{2}{d}x^{i}$ に動かした時 次の関係が成立つとする．

(3.1) $$(\underset{2}{d}\underset{1}{d}x^{\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{\mu i}\underset{1}{d}x^{\mu}\underset{2}{d}x^{i})-(\underset{1}{d}\underset{2}{d}x^{\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{\mu i}\underset{2}{d}x^{\mu}\underset{1}{d}x^{i})=0.$$

換言すれば

(3.2) $$\Gamma^{\lambda}_{ij}=\Gamma^{\lambda}_{ji}$$

成分に分けると

(3.3) $$\Gamma^{i}_{jk}=\Gamma^{i}_{kj},\qquad \Gamma^{0}_{jk}=\Gamma^{0}_{kj}$$

となる。故に（1.8）の如く

$$\Gamma^{i}_{jk}=\left\{ {i \atop jk} \right\}$$

となるのは勿論である．

Riemann空間や共形接続空間に於て Holonomy群の性質から空間の構造を決定する研究が近年佐々木重夫博士 矢野健太郎博士等に依り大きな発展を見た。之等に就ては ◎ 佐々木重夫 矢野健太郎 「Holonomy群が任意次元の球を不変にするやうな共形接続空間の構造に就て」（「数学」第1巻第一号）

◎ 佐々木重夫 「共形接続幾何学」（河出書房）

等を参照されたい

我々のLn に於ても接続の係数 $\Gamma^{\lambda}_{\mu i}$ に依て 空間の各点に附属する n+1 次元ベクトル空間（超球空間）を閉曲線に沿って次々と動かしてゆけば 全く同様に Holonomy群なるものを考へることが出来る．

§4 Holonomy群が一つの超球を不変にするLnの構造

(A) $$V^{\lambda}=\begin{cases} V^{i} & (\lambda=i) \\ 0 & (\lambda=0) \end{cases}$$

の形の超球（即ち点）が固定される場合を先ず考へる。

(4.1) $$DV^{\lambda}+dx^{\lambda}=dV^{\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{\mu k}V^{\mu}dx^{k}+dx^{\lambda}=0$$

即ち　成分に分ければ

(4.2) $$\begin{cases} dV^{i}+\Gamma^{i}_{jk}V^{j}dx^{k}+dx^{i}=0 \\ \Gamma^{0}_{ij}V^{i}dx^{j}=0 \end{cases}$$

でなければならない。

dx^{i} は任意だから

(4.3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial V^{i}}{\partial x^{k}}+\Gamma^{i}_{jk}V+\delta^{i}_{k}=0 \\ \Gamma^{0}_{jk}V^{j}=0 \end{cases}$$

が必要充分である。即ち V^{i} は R_n のベクトルとしては定点通過ベクトル場を形成する，かゝる R_n の構造は良く知られてゐるから略す。

次に超球

(B) $$V^{\lambda}=\begin{cases} 0 & (\lambda=i) \\ V^{0} & (\lambda=0) \end{cases}$$

即ち各点 (x^{i}) を中心とする超球が固定される場合を考へよう。此の場合は

(4.4) $$DV^{\lambda}+dx^{\lambda}=\begin{cases} \Gamma^{i}_{0k}V^{0}dx^{k}+dx^{i}=0 & (\lambda=i) \\ dV^{0}=0 & (\lambda=0) \end{cases}$$

が dx^{i} の如何に不拘成立たねばならないから，

(4.5) $$V^{0}=\text{const.}$$

(4.6) $$\Gamma^{i}_{0k}V^{0}+\delta^{i}_{k}=0$$

となる。換言すれば

(4.7) $$\Gamma^{0}_{ik}=g_{im}\Gamma^{m}_{0k}=Cg_{ik}\quad(c\text{ は常数})\text{。}$$

此の場合注意すべきことがある。それは

［定理］．$\Gamma^{0}_{ij}=Cg_{ij}$（$C=$ 常数）の時はそれに接する超球が其の超曲面に沿って L_n の意味で展開された時いつも重ちるやうな超曲面は R_n の固有会府超曲面である。

［証明］今 $\overline{R}_n$ の中の或る超曲面

$$x^{i}=x^{i}(u^{1},\dots u^{n-1})$$

の各点でこの曲面に接する超球

(4.8) $$V^\lambda = \begin{cases} f n^i & (\lambda = i) \\ f & (\lambda = 0) \end{cases}$$

（但し n^i は超曲面の法線ベクトルとする）

が　此の超曲面に沿つて L_n の意味で展開された時、常に重なるとする。即ち超曲面に沿つて、

(4.9) $$DV^\lambda + dx^\lambda = 0$$

が成立つとする。

従つて

(4.10) $$\begin{cases} d(fn^i) + \Gamma^i_{jk} f n^j dx^k + f\Gamma^i_{0k} dx^k + dx^i = 0. \\ df + f\Gamma^0_{ij} n^i dx^j = 0 \end{cases}$$

(4.11) $$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^A} du^A$$ （A.B.C 等は 1 から $n-1$ 迄動く）

が du^A の如何に不拘成立つ。換言すれば

(4.12) $$\begin{cases} (a) & \dfrac{\partial f}{\partial u^A} n^i + f\left(\dfrac{\partial n^i}{\partial u^A} + \Gamma^i_{jk} n^j \dfrac{\partial x^k}{\partial u^A} + \Gamma^i_{0k} \dfrac{\partial x^k}{\partial u^A}\right) + \dfrac{\partial x^i}{\partial u^A} = 0 \\ (b) & \dfrac{\partial f}{\partial u^A} + \Gamma^0_{ij} f n^i \dfrac{\partial x^j}{\partial u^A} = 0 \end{cases}$$

而るに Riemann 幾何の超曲面論から

(4.13) $$\frac{\partial n^i}{\partial u^A} + \left\{ {i \atop jk} \right\} n^j \frac{\partial x^k}{\partial u^A} = -\frac{\partial x^i}{\partial u^B} H^B_{\cdot A}$$

であるし、又

$$\Gamma^i_{0k} = C\delta^i_k$$

であるから (4.12 a) から 次の2つの関係を得る。

(4.14) $$\frac{\partial f}{\partial u^A} = 0 \qquad f = const$$

(4.15) $$f(-H^B{}_A + C\delta^B_A) + \delta^B_A = 0$$

即ち

$$H^B{}_A = \frac{fC + 1}{f}\,\delta^B_A$$

右辺の係数は超曲面に沿つては常数だから、此の超曲面は R_n の固有全臍超曲面であることが分る

此の際 (4.12. b) は (4.14) から当然成立つ。　(3)

§5 矢口

(c) $$V^\lambda = \begin{cases} V^i & (\lambda = i) \\ V^0 & (\lambda = 0) \end{cases}$$

即ち一般の位置にある超球が固定される場合は

(5.1) $$DV^\lambda + dx^\lambda = dV^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu k} V^\mu dx^k + dx^\lambda = 0$$

であつて 成分に分ければ

(5.2) $$\begin{cases} dV^i + \Gamma^i_{jk} V^j dx^k + \Gamma^i_{0k} V^0 dx^k + dx^i = 0 \\ dV^0 + \Gamma^0_{ij} V^i dx^j = 0 \end{cases}$$

dx^i は任意だから

(5.3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} V^j + \Gamma^i_{0k} V^0 + \delta^i_k = 0 & (a) \\ \dfrac{\partial V^0}{\partial x^k} + \Gamma^0_{jk} V^j = 0 & (b) \end{cases}$$

でなければならない。今

(5.4) $$V_i = g_{ij} V^j$$

と置けば　(5.3.a) なら 次式を得る。

(5.5) $$\left(\frac{\partial V_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ik} V_j\right) + \Gamma^0_{ik} V^0 + g_{ik} = 0$$

i と k を入れ替へて (5-5) から引けば.

(5.6) $$\frac{\partial V_i}{\partial x^k} - \frac{\partial V_k}{\partial x^i} = 0.$$

即ち V_i は或るスカラー φ の勾配である.

(5.7) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = V_i.$$

これと (5-5) から次式を得る.

(5.8) $$V^i\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^m_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^m}\right) + \Gamma^0_{j} V^0 V^i + \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0$$

又 (5. 3 b) より

(5.9) $$\frac{1}{2} \frac{\partial (V^0)^2}{\partial x^k} + \Gamma^0_{jk} V^0 V^j = 0$$

(5.8) と (5.9) から

(5.10) $$g^{ab}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^a}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^b \partial x^k} - \Gamma^j_{bk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial (V^0)^2}{\partial x^k} = 0$$

即ち.

(5.11) $$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{ab}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)+\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\varphi-\frac{1}{2}(V^0)^2\right)=0$$

由て

(5.12) $$V^0=\sqrt{2\varphi+g^{ab}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi}{\partial x^b}}$$

となる．又 (5.5) から $V^0\neq 0$ の点では

(5.13) $$\Gamma^0_{ij}=\frac{-g_{ij}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^m_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^m}\right)}{\sqrt{2\varphi+g^{ab}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi}{\partial x^b}}}$$

である．(5.7) と (5.12) から

(5.14) $$g_{ij}V^iV^j-V^0V^0=-2\varphi$$

即ち固定される超球 V^λ は $\varphi=const$ の超曲面上の各点から同じ共通切線距離にある．

以上を要約すると次の表の様になる．

	固定される超球	Γ^0_{ij} の形
A	$V^\lambda=\begin{cases}V^i & (\lambda=i)\\ 0 & (\lambda=0)\end{cases}$	$\frac{\partial V^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{mj}V^m+\delta^i_j=0$ $\Gamma^0_{mj}V^m=0.$
B	$V^\lambda=\begin{cases}0 & (\lambda=i)\\ V^0 & (\lambda=0)\end{cases}$	$\Gamma^0_{ij}=Cg_{ij}$ (Cは常数)
C	$V^\lambda=\begin{cases}V^i & (\lambda=i)\\ V^0 & (\lambda=0)\end{cases}$	$\Gamma^0_{ij}=\frac{-g_{ij}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\right)}{\sqrt{2\varphi+g^{ab}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\frac{\partial\varphi}{\partial x^b}}}$

§6. 二つの超球が固定される L_n の構造

BとCが共に成立つ場合を考へる．即ち．各点 (x^i) を中心とする超球の他に更に超か一般の位置にある V^λ と云ふ超球が一つ固定される場合はどうか．此の時は §4 から

(6.1) $$\Gamma^0_{ij}=Cg_{ij},\qquad \Gamma^i_{0k}=C\delta^i_k.$$

であるから (5.3) (5.7) (5.12) から

$$(6.2)\begin{cases} (a) & \dfrac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} V^j + C\,\delta^i_k V^0 + \delta^i_k = 0 \\ (b) & V^i = g^{im} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^m} \\ (c) & V^0 = \sqrt{2\varphi + g^{ab} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^a} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^b}} \end{cases}$$

である。

この際 $\varphi = const$ の超曲面は固有全臍超曲面であることが分る。それは、V^i は (6.2 b) なら $\varphi = const$ の超曲面の法ベクトル n^i に比例するから、

$$V^i = \rho n^i$$

とおける。又 $\varphi = const$ のパラメーター表示を

$$x^i = x^i(u^A) \qquad (A = 1 \ldots n-1)$$

とすれば (6.2. a) から次の式を得る。

$$(6.3) \qquad d(\rho n^i) + \Gamma^i_{jk} \rho n^j dx^k + (CV^0 + 1) dx^i = 0$$

即ち、

$$(6.4) \qquad n^i d\rho + \rho \left(-\frac{\partial x^i}{\partial u^B} H^{B}_{\cdot A}\right) du^A + (CV^0 + 1) \frac{\partial x^i}{\partial u^A} du^A = 0$$

du^A は任意であるから、n^i と $\dfrac{\partial x^i}{\partial u^A}$ の係数を各0と置けば

$$(6.5) \qquad \rho = const \quad (\varphi = const \text{ の上で})$$

及び

$$(6.6) \qquad H^{B}_{\cdot A} = \frac{CV^0 + 1}{\rho} \delta^B_A$$

又 (6.2c) と (6.5) と

$$(6.7) \qquad \rho^2 = g_{ij} V^i V^j = g^{ab} \frac{\partial \varphi}{\partial x^a} \frac{\partial \varphi}{\partial x^b}$$

から

$$(6.8) \qquad V^0 = const \quad (\varphi = const \text{ の上で})$$

故に (6.6) から

$$(6.9) \qquad H^B{}_A = C' \delta^B_A \quad (C' = const,\ \varphi = const \text{ 上で})$$

即ち $\varphi = const$ の超曲面は固有全臍超曲面である。

次に $\varphi = const$ の超曲面群の直截曲線は測地線である。

何者 $x^i = x^i(t)$ をかゝる直截曲線とすれば次の様に書ける。

$$(6.10) \qquad V^i = \frac{dx}{dt}$$

而るに (6.2 a) より

$$\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{dt} + (cv^0 + 1)\frac{dx^i}{dt} = 0 \tag{6.11}$$

であるから （6.10） を代入して.

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + {}_{,}\Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + (cv^0 + 1)\frac{dx^i}{dt} = 0. \tag{6.12}$$

之は測地線の方程式に他ならない・即ち此の場合 Rnは直数曲線が測地線である様た∞¹の固有全測超曲面を含む と云ふことになる.

（1948．5．10）